

Egzamin z analizy matematycznej I.2: termin I

24 czerwca 2024, 14:00; czas pracy: 3:30

Każdą kartkę należy czytelnie podpisać.

Rozwiązanie różnych zadań należy umieścić na oddzielnych kartkach.

Zadanie 0. należy oddać przed pierwszym wyjściem z sali.

Nie wolno korzystać z książek, notatek z zajęć itp., pomocy innych osób, internetu (w tym programów do obliczeń symbolicznych). Nie wolno komunikować się z innymi uczestnikami kolokwium.

Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy, ...

Zadanie 1 (16 pkt.). Niech

$$f(x) = \int_x^{\sin(x)} \ln(1+t) \, dt, \quad g(x) = \int_0^{\ln(1+x)} \sin^3(t) \, dt.$$

Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Zadanie 2 (16 pkt.). Zbadać zbieżność całki w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \frac{\arctg x}{x^a} \sqrt{1+x^b} \, dx.$$

Zadanie 3 (16 pkt.). Znaleźć granicę $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n^2]{\prod_{k=1}^n \left(\frac{k^2 - k + n^2}{n^2} \right)^{\sqrt{k^2 - k}}}$.

Zadanie 4 (16 pkt.). Niech $L(a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, oznacza długość krzywej $y = \frac{2}{3}ax^{3/2}$, $x \in [0, 1]$. Określmy funkcję $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(a) = \begin{cases} \frac{L(a) - 1}{a^2}, & \text{dla } a \neq 0, \\ \beta & \text{dla } a = 0. \end{cases}$$

a) Wyznaczyć takie β , by funkcja f była ciągła.

b) Wykazać, że dla β wyznaczonego w punkcie a) funkcja f ma lokalne maksimum w $a = 0$.

Wsk. Długość łuku krzywej $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dana jest wzorem $\int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} \, dt$.

Oczywiście krzywa musi być klasy C^1 .

Zadanie 5 (16 pkt.). Dana jest funkcja ciągła $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ i ograniczona. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^3} f(x) x^2}{\left(x^3 + \frac{1}{n^3}\right)^2} \, dx.$$